

椭圆面积的推算

朱睿哲

2019年6月3日

1 引入

单位圆的面积为 π ，用积分来表示就是

$$\pi = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 的面积为:

$$a^2\pi = 4 \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx$$

2 计算

求: 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的面积 ($a, b > 0$)

解:

记 S 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的面积, 有:

$$\begin{aligned} b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\ \Rightarrow y^2 &= b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \\ \Rightarrow y &= \pm\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} \end{aligned}$$

若只考虑在第一象限的面积, 那么有:

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^a \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} dx \\ &= 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}x^2} dx \\ &= \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \frac{4b}{a} * \frac{1}{4}a^2\pi \\ &= ab\pi \end{aligned}$$